
Дэвид В. К. Янг

**О стохастических дифференциальных играх
со случайным изменением динамики
в условиях неопределенности
структуры и продолжительности***

(Выступление на церемонии присвоения
звания «Почетный доктор СПбГУ»)

Перевод Ю. М. Донца

Под научной редакцией Н. А. Зенкевича

Дэвид В. К. Янг является известным ученым – специалистом в области теории динамических и дифференциальных игр и их приложений. Специализируясь в области финансовых приложений, он впервые разработал математическую модель поведения институционального инвестора в форме стохастической дифференциальной игры. Предложенный им теоретико-игровой подход привнес в теорию финансов незаслуженно забытую компоненту – стратегическое взаимодействие. Более того, формируя рациональные позиционные стратегии, институциональные инвесторы получают возможность исключить временную несостоятельность (динамическую неустойчивость), которая может приводить к сверхзатратным инвестициям и спекулятивным всплескам финансовых систем. С этой точки зрения результаты Д. Янга проливают свет на правила принятия решений в современных финансовых структурах.

В своих последних работах Д. Янг построил основы рационального поведения в процессе ценообразования на финансовых фондовых рынках и прогнозирования динамики цен, основанной на реально наблюдаемой рыночной ситуации. Данные результаты получены через анализ эволюции игровых равновесий, которые учитывают текущие цены активов и настоящую процентную ставку. Полученные результаты, на наш взгляд, формируют новый подход к моделированию рационального ценообразования на фондовых рынках.

* Гонконгский Баптистский Университет, Гонконг

Мы приводим выступление Дэвида В. К. Янга на торжественной церемонии присвоения звания «Почетный доктор СПбГУ» в Санкт-Петербургском государственном университете 15 июня 2002 года.

Н. А. Зенкевич,
член Совета Центра Теории Игр СПбГУ

«Математическая теория черных дыр является невероятно сложным предметом, но её изучение убедило меня в фундаментальной истинности древних девизов: «простое есть печать истинного» и «красота есть великолепие истины» (Чандрасекар, 1983).

Для меня большая честь присоединиться к числу знаменитых предшественников, удостоенных звания «Почетного доктора Санкт-Петербургского Государственного Университета». Сегодня я хотел бы поделиться с широкой научной аудиторией некоторыми мыслями о новой практически значимой парадигме для моделирования игровых ситуаций в условиях неопределенности, а именно – о «стохастических дифференциальных играх со случайным изменением динамики в условиях неопределенности структуры и продолжительности».

В процессе подготовки этого выступления мне вспомнилось приведенное выше высказывание Чандрасекара из его Нобелевской лекции. Хотя игры, которые я собираюсь обсудить, формально достаточно сложны, я полагаю, что принципиальные идеи могут быть объяснены просто.

Введение

Возрастающее признание важности стратегического анализа для различных областей человеческой деятельности означает, что теория игр быстро становится одним из наиболее часто используемых инструментов в научных исследованиях и приложениях. В сущности, теория игр изучает процесс принятия решения в условиях взаимодействия интересов участников. Она опирается на математику, статистику, науку об управлении, исследование операций, инженерию, экономику, политологию и другие дисциплины. Теоретические исследования и приложения теории игр быстро развиваются в широком диапазоне –

от управления самолетами и ракетами до добычи природных ресурсов, методов ведения переговоров, финансового инвестирования и охраны окружающей среды. Таким образом, теория игр представляет собой, по всей видимости, самую сложную и перспективную парадигму, предложенную прикладной наукой для изучения и анализа процессов принятия решений в реальном мире.

По мере усложнения общественно-экономических и политических проблем растет потребность в дальнейшем расширении и развитии аналитического аппарата, методологии, методов и приложений теории игр, ситуационных и эмпирических исследований. Во многих предметных областях, таких как экономика, бизнес, управление, политология, инженерия, биология, вычислительная техника и математика, мы сталкиваемся с конфликтами ситуациями, которые формально могут быть исследованы в рамках теории игр. Если к тому же учесть практическую важность этих предметных областей, то можно ожидать, что в грядущие годы мы станем свидетелями широкого и активного применения теории игр в различных сферах.

Настоящий и будущий этапы таких исследований направлены на более реалистичский и практически значимый исследования процессов принятия решений. При этом представляется, что теоретико-игровой подход позволит выяснить новые интересные вопросы и проблемы.

К числу наиболее важных исследований по общей теории игр относятся работы Дж. фон Неймана и О. Morgenштерна,¹ Дж. Нэша,² Н. Воробьева,³ Л. Шепли⁴ и М. Шубика.⁵

¹ Von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*, Wiley, NY.

² Nash, J. (1950): Equilibrium points in N-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*; and Nash, J. (1953): Two-person cooperative games, *Econometrica* 21.

³ Vorob'ev, N. N. (1972): *Foundations of Game Theory – Noncooperative Games*, Birkhäuser Verlag.

⁴ Shapley, L. (1953): Stochastic games, *Proceedings of the National Academy of Science*; Shapley, L. (1953): A value for n-person games in Kuhn and Tucker; and Shapley, L. S. (1972): Cores of convex games, *International Journal of Game Theory*.

⁵ Shubik, M. (1959): Edgeworth market games in *Contributions to the Theory of Games IV*, *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press; and Shubik, M. (1959): *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly and the Theory of Games*, John Wiley, NY.

Дифференциальные игры и стохастические дифференциальные игры

Динамические или дифференциальные игры представляют собой одно из наиболее сложных, но, в то же время, и перспективных направлений теории игр. Здесь процесс принятия решения в условиях взаимодействия сторон исследуется во времени. Поскольку люди живут во времени, и принятие решения в общем случае приводит к последствиям на некотором временном промежутке, высказывание о том что «жизнь есть динамическая игра» будет лишь небольшим преувеличением.

Дифференциальные игры берут свое начало от известной работы Р. Айзекса,⁶ опубликованной в конце сороковых годов двадцатого века. Эта конструктивная монография вместе с исследованиями Р. Беллмана⁷ по динамическому программированию и Л. Понтрягина⁸ с соавторами по оптимальному управлению заложили основы дифференциальных игр в рамках детерминированной структуры. Впоследствии многие исследования по дифференциальным играм сосредотачивались на решении общих проблем управления. Л. Берковец⁹ применил вариационный подход к решению дифференциальных игр, Г. Лейтман и Г. Мон¹⁰ сосредоточились на исследовании геометрических аспектов, а Л. Понтрягин¹¹ занялся исследованием позиционных решений дифференциальных игр, используя свой принцип максимума. А. Зауберман¹² дал интересную интерпретацию различным разработкам, появившимся в советской литературе до начала семидесятых годов двадцатого века.

⁶ Isaacs, R. (1965): *Differential Games*, Wiley, NY.

⁷ Bellman, R. (1957): *Dynamic Programming*, Princeton University Press, NJ.

⁸ Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko (1962): *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, NY.

⁹ Berkovitz, L. D. (1964): A variational approach to differential games, in: *Advances in Game Theory*, M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker, eds., Princeton University Press, NJ.

¹⁰ Leitmann G. and G. Mon (1967): Some geometric aspects of differential games, *Journal of Astronaut and Science*.

¹¹ Pontryagin, L. S. (1966): On the theory of differential games, *Uspekhi Mat. Nauk* 21.

¹² Zauberermann, A. (1975): *Differential Games and Other Game-Theoretic Topics in Soviet Literature*, New York University Press, NY.

В это же время в классической работе У. Флеминга¹³ был предложен механизм решения задач с одним участником и стохастическим управлением. Т. Башар¹⁴ первым получил аналитическое решение стохастических квадратичных игр. Последующие примеры разрешимых стохастических дифференциальных игр изложены в работах С. Клемгута и Х. Вана,¹⁵ В. Кайталы,¹⁶ С. Йоргенсена и Д. Янга,¹⁷ Д. Янга¹⁸.

Неопределенность структуры и продолжительности

Принципиальная особенность времени, а, следовательно, и процесс принятия решений во времени заключается в том, что, хотя индивид может накапливать информацию о своих прошлых и настоящих состояниях, будущее состояние, по существу, невозможно предсказать точно, и поэтому оно является неопределенным (в математическом смысле). От этого факта никуда не деться, даже несмотря на все гипотетически возможные усилия, направленные на получение информации и прогнозирование состояния. Поэтому, практически значимая теория игр должна соответствующим образом учитывать неопределенности, порожденные временем. Двумя важными видами такой неопределенности являются неопределенность структуры и неопределенность продолжительности. Первый вид неопределенности прояв-

¹³ Fleming, W. H. (1969): Optimal continuous-parameter stochastic control, *SIAM Review*.

¹⁴ Basar, T. (1977): Informationally nonunique equilibrium solutions in differential games, *SIAM Journal of Control and Optimization*; and Basar, T. (1980): On the existence and uniqueness of closed-loop sampled-data Nash controls in linear-quadratic stochastic differential games in *Optimization Techniques*, K. Iracki et al. (eds.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York.

¹⁵ Clemhout, S., and H. Y. Wan, Jr. (1985): Dynamic common-property resources and environmental problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

¹⁶ Kaitala, V. (1993): Equilibria in a stochastic resource management game under imperfect information, *European Journal of Operational Research*.

¹⁷ Jorgensen, S. and D. W. K. Yeung (1996): Stochastic differential game model of a common property fishery, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

¹⁸ Yeung, D. W. K. (1998): A class of differential games which admits a feedback solution with linear value functions, *European Journal of Operational Research*; and Yeung, D. W. K. (1999): A stochastic differential game model of institutional investor speculation, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

ляется посредством случайных структурных изменений выигрышей и динамики состояний. Второй вид неопределенности появляется в тех случаях, когда продолжительность процесса принятия решений является неопределенной. В реальной жизни проблемы, связанные с играми с неопределенной продолжительностью, стохастической динамикой и неопределенными будущими выигрышами, являются скорее правилом, чем исключением.

Неопределенность структуры включает в себя: (а) неточное или неполное знание во времени выигрышей в игре, поскольку выгоды и затраты в процессе игры можно считать известными только в вероятностном смысле; (б) несовершенное знание об изменении параметров состояния игры, так как в общем случае точно неизвестно, как состояние будет изменяться во времени; (в) тот факт, что число и типы будущих игроков не известны – в большинстве случаев действующим игрокам известно лишь распределение вероятностей типов игроков в каждый будущий момент времени.

Неопределенность по продолжительности появляется в различных случаях. (а) Во многих игровых ситуациях время окончания игры либо является весьма отдаленным в будущем, либо точно не известно игрокам. Как утверждают Е. Докнер и С. Йоргенсен,¹⁹ в таком случае стремящаяся к бесконечности продолжительность игры представляла бы наилучшее приближение истинной продолжительности. (б) В некоторых игровых ситуациях продолжительности игры различны для разных игроков. Различия в продолжительности могут быть связаны с различной продолжительностью жизни, различной синхронизацией входа и выхода на различных рынках, различными сроками аренды и т. п. Многие экономические системы служат примерами такого типа игр с асинхронной продолжительностью. (в) Другая разновидность неопределенной продолжительности появляется в тех случаях, когда продолжительность игры эндогенно детерминирована. Например, игра заканчивается тогда, когда некоторое подмножество параметров состояния в этот момент удовлетворяет некоторому свойству.

Решение сложных проблем

Для решения сложных проблем, проистекающих из неопределенности структуры и продолжительности, мною предложен новый класс

¹⁹ Dockner, E., S. Jørgensen, N. V. Long and G. Sorger (2000): *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press, Cambridge.

стохастических дифференциальных игр со случайным изменением динамики, где допускаются случайное изменение динамики и стохастические изменения выигрышей. Поскольку будущие выигрыши в точности не известны, термин «случайное изменение» вводится для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что практически полезный способ анализа игровой ситуации заключается именно в допущении изменения выигрышей в любой момент времени в соответствии с распределениями вероятностей, определёнными на основе реализации стохастических процессов. Формальное определение неопределённости структуры и продолжительности существенно расширяет область применения теории дифференциальных игр. В сферах экономики, ценообразования на рынке ценных бумаг и политики существует множество примеров, когда будущая окружающая среда является неопределённой.

На основе такого анализа мною разработан новый подход к решению дифференциальных игр с учётом свойств и концепции решения, которые ранее не исследовались в литературе. Получены новые важные математические результаты, с помощью которых можно охарактеризовать условия, обеспечивающие возможность решения ранее неизвестных игр. Наряду с обобщениями известных результатов Айзекса-Беллмана и Флеминга доказаны новые математические теоремы для решения задач стохастических дифференциальных игр в условиях неопределённой структуры и продолжительности. Эти результаты применимы и к теории оптимизации, особенно при решении задач неавтономного стохастического оптимального управления со случайным изменением динамики при бесконечной продолжительности.

Класс стохастических дифференциальных игр со случайным изменением динамики обосновывает новую парадигму для более содержательного и реалистического моделирования теоретико-игровых ситуаций во времени. Существует три интересных случая таких игр:

- (i) стохастические дифференциальные игры со случайным изменением динамики при бесконечной продолжительности,
- (ii) стохастические дифференциальные игры со случайным изменением динамики и случайной продолжительностью,
- (iii) дифференциальные игры со случайным изменением динамики при эндогенных продолжительностях.

Первые исследования таких типов игр можно найти в работах С. Йоргенсена, Д. Янга и Л. Петросяна.^{20 21 22 23}

Заключительные замечания

После появления в конце сороковых годов двадцатого века конструктивных работ Р. Айзекса дифференциальные игры в процессе своего развития превратились в стандартную парадигму для анализа проблем принятия решений в условиях взаимодействия во времени. Классическая работа У. Флеминга стимулировала существенные разработки в области стохастических дифференциальных игр.

Представленные в этой лекции исследования обобщают эти результаты на случай стохастического изменения структуры. Введение случайного изменения динамики раздвигает рамки теории дифференциальных игр до проблем, в которых будущие ситуации в точности неизвестны. На идейном уровне этот подход представляет собой новый метод моделирования динамических игровых ситуаций в условиях неопределенности.

Специалистам по теории игр предстоит еще немало сделать для того, чтобы разрабатываемая теория стала практически применимой. Например, необходимо разработать механизмы для решения уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана.

В прикладном аспекте требуется специальный анализ таких более сложных и трудно прогнозируемых ситуаций, как технический прогресс и кооперативные схемы.

²⁰ Yeung, D. W. K. (2002): Random forcuting stochastic differential games, paper presented at the *International Congress of Mathematicians Satellite Conference on Game Theory and Applications*, Qingdao.

²¹ Jorgensen, S. and D. W. K. Yeung (1999): Inter- and intragenerational renewable resource extraction, *Annals of Operations Research*.

²² Petrosyan, L., M. Kiltina and D.W. K. Yeung (2002): Dynamic games with random duration and uncertain payoff in *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*, V. F. Kolchin, V. Ya. Kozlov, V.V. Mazalov, Yu.L. Pavlov and Yu. V. Prokhorov (eds.), Brill Academic Publishers, The Netherlands.

²³ Yeung, D. W. K. (2000): Feedback solution of a class of differential games with endogenous horizons, *Journal of Optimization Theory and Applications*; Yeung, D. W. K. (2001): Infinite-Horizon Stochastic Differential Games with Branching Payoffs, *Journal of Optimization Theory and Applications*; and Yeung, D. W. K. (2001): Infinite Overlapping-Generations Stochastic Differential Games with Uncertain Number and Types of Players in *Proceedings of the 5th International Conference on Optimization: Techniques and Applications*, D. Li (ed).